МАТЕМАТИЧЕСКО И ЧИСЛЕНО МОДЕЛИРАНЕ НА ТЕЧЕНИЕТО НАД ФРОНТА НА ГОРСКИ ПОЖАР

гл. ас. д-р инж. Али Чакър
ВСУ „Черноризец Храбър“ – Варна

Резюме: *Направен е математически модел, като се изхожда от плоската форма на фронта на пожара. Създаденият двумерен модел се решава по интегрален метод, при който системата частни диференциални уравнения се свежда до система от обикновени диференциални уравнения. Получената система се решава числено със специално създаден софтуер за целта. Направен е анализ на получените на основата на симулацията резултати.*

Ключови думи: *математическо и числено моделиране, фронт на горски пожар, двуфазно течение;*

MATHEMATICAL AND NUMERICAL MODELING OF THE FLOW ABOVE THE FRONT ON FOREST FIRE

Chief Asst. Prof. Ali Chakar, Phd Eng.
VFU “Chernorizets Hrabar” – Varna

Summary: A mathematical model is made based on the flat shape of the fire front. The created two-dimensional model is solved by an integral method, in which the system of partial differential equations is reduced to a system of ordinary differential equations. The resulting system is solved numerically with specially

created software for this purpose. An analyses of the results obtained on the basis of the simulation was made.

Key words: mathematical and numerical modeling, forest fire front, two-phase flow;

1. Математически модел.

Разглежда се вертикално изтичащо нагоре двуфазно неизотермично струйно течение. Неизотермичния характер на течението и пространствента му ориентация определят възникването на подемна сила (Архимедова сила), дължаща се на голямата разлика в плътностите на струята и средата ($T_{ст} \gg T_{ок}, \rho_{ст} \gg \rho_{ок}$) и налагат отчитането на силата от сбствено тегло на изнесените частици примеси:

$$1.\ dF_A = -\left[\int\left(\rho - \rho_{ok}\right) g df\right] dx$$

$$2.\ \overrightarrow{f_m} = m_p \vec{g}$$

При изследване на двуфазното течение се прилага т. нар. двуфлуидна схема на течението, при която се прилага хипотезата на Ландау за едновремено съществуване и движение на два различаващи се по своите свойства флуида. В нашия случай се приема, че двете фази – на носещата (газова) среда и на фазата на примесите представляват отделни флуидни среди всяка една, от които притежава собствена скорост, турбулентност, плътност и температура. Движението на двете фази се описва със система частни диференциални уравнения на Рейнолдс. За фазата на примесите се приема, че тя е осбена флуидна среда, подчиняваща се на уравнението за непрекъснатост, но не притежава собствен тензор на вътрешно триене (липсва и вискозитет и налягане) и за нея не е в сила уравнението на състочнието (уравнение на Клайпейрон). Фазата на примесите се разглежда като „неплъна" флуидна среда, за която времето за релаксация след удара между две частици τ_{rel} е винаги много по – голямо от времето между два удара $\tau_{уд}$.

3.$\tau_{rel} \gg \tau_{уу}$

Това дава основание да се приеме, че количеството на движение на носещата (газова) фаза компенсира (захранва) флуида на примесите с доплълнително количество на движение.

Връзката между двете системи уравнения (за двете фази) са т. нар. сили на междуфазово взаимодействие. Горното условие означава, че тези сили се записиват съответно със знак „-" в уравненията за носещата среда и със знак „+" при фазата на примесите. Най – често в разглеждания случай се прилагат: сила от собствено тегло, аеродинамичната съпротивителна сила, подемната сила, сила от термофореза и сила на Сафман., които са описани в [2]. В уравнеията параметрите на носещата фаза се означават с индекс „g", а на фазата на приемсите с „p". Приема се удобство при съставянето на модела, че:

1) Частицата примеси има сферична форма с диаметър D_p.
2) Не променя диаметъра си при движението, както и плътността си.

Уравненията, описващи разпространенито на двуфазна неизотермична плоска вертикална турбулентна струя имат вида

4. $$\frac{\partial}{\partial x}\left[U_g\rho_g\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[V_g\rho_g\right]=0$$

5. $$\frac{\partial}{\partial x}\left[U_p\rho_p\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[V_p\rho_p\right]=0$$

6. $\left[U_p\right]\frac{\partial\rho_p}{\partial x}+\left[V_p\right]\frac{\partial\rho_p}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho_p^{'}V_p^{'}\right]-\overline{\rho_p^{'}V_p^{'}}$

7.

$$\left[\rho_g U_g\right]\frac{\partial U_g}{\partial x}+\left[\rho_g V_g\right]\frac{\partial U_g}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho_g\overline{U_g^{'}V_g^{'}}\right]-F_x-\left(\rho_2-\rho_g\right)\pi g$$

8.

$$\left[\rho_g U_p\right]\frac{\partial U_p}{\partial x}+\left[\left(\rho_p V_p+\overline{\rho_p^{'}V_p^{'}}\right)\right]\frac{\partial U_p}{\partial y}=$$
$$-\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho_p\overline{U_p^{'}V_p^{'}}\right]+F_x\pm m_p g$$

9.

$$\left[\rho_g U_g\right]\frac{\partial h_g}{\partial x}+\left[\rho_g V_g\right]\frac{\partial h_g}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho_g\overline{h_g^{'}V_g^{'}}\right]-$$
$$-\left[\rho_g\overline{h_g^{'}V_g^{'}}\right]\frac{\partial U_g}{\partial y}-Qy^j+F_x\left(U_g-U_p\right)+F_y\left(V_g-V_p\right)-\sum_{i=1}^{3}\overline{F_i^{'}V_{pi}^{'}}$$

10. $\left[\rho_p U_p\right]\frac{\partial h_p}{\partial x}+\left[\left(\rho_p V_p+\overline{\rho_p^{'}V_p^{'}}\right)\right]\frac{\partial h_p}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho_p\overline{h_p V_p^{'}}\right]+Q$

11. $P=\rho_g R T_g$

Уравнения 4 и 5. представляват съответно уравнението за непрекъснатост за газовата фаза и фазата на примесите. Уравн. 6 е уравнение за промяна на плътността. Уравнения 7 и 8 представляват уравнения за количество за движение на газовата фаза и фазата на примесите. Уравнения 9 и 10 са съответно уравненията за запазване на енергията на газовата фаза и фазата на примесите, като последното уравнение 11 представлява уравнението на Клайпейрон за състоянието на газа.

Граничните условия на изследваната система частни диференциални уравнения имат вида:

-за оста на симетрия $\left(y=0\right)$***:***

$$\frac{\partial U_g}{\partial y}=\frac{\partial U_p}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial \mathrm{T_g}}{\partial \mathrm{y}}=\frac{\partial T_p}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial \rho_{\mathrm{p}}}{\partial \mathrm{y}}=0$$

$$\overline{U_g^{'}V_g^{'}}=\frac{\partial \overline{U_g^{'}V_g^{'}}}{\partial y}=0 \qquad \overline{\mathrm{U_p^{'}}V_p^{'}}=\frac{\partial \overline{U_p^{'}V_p^{'}}}{\partial y}=0$$

$$\overline{V_p^{'}\rho_p^{'}}=\frac{\partial \overline{V_p^{'}\rho_p^{'}}}{\partial y}=0 \qquad \mathrm{V_g}=V_p=0$$

- ***за външната граница на струята*** $\left(y\to\infty\right)$

$$\overline{U_g^{'}V_g^{'}}=\frac{\partial \overline{U_g^{'}V_g^{'}}}{\partial y}=0 \qquad \overline{\mathrm{U_p^{'}}V_p^{'}}=\frac{\partial \overline{U_p^{'}V_p^{'}}}{\partial y}=0$$

$$\overline{V_p^{'}\rho_p^{'}}=\frac{\partial \overline{V_p^{'}\rho_p^{'}}}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial \mathrm{T_g}}{\partial \mathrm{y}}=\frac{\partial T_p}{\partial y}=0$$

$$V_g=V_p=0; U_p=U_2; \rho_p=0; T_g=T_p=T_2; \rho_g=\rho_2$$

2. Интегрални условия.

Съвместното решение на системата уравнения 4÷11 и граничните условия води до получаване на интегралните условия на изследваното течение. Тези условия са:

12. $\int\limits_0^\infty \rho_p U_p dy=G_0$

13.

$$\int_0^\infty \rho_g U_g \left(U_g - U_2\right) dy + \int_0^\infty \rho_p U_p^2 dy + \int_0^\infty g\pi\rho_2 y^j dy - \int_0^\infty g\pi\rho_{gm} dy = I_0$$

14.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^\infty \rho_g U_g \left(U_g - U_2\right)^2 dy\right] = -2\int_0^\infty \rho_g \nu_{tg} \left(\frac{\partial U_g}{\partial y}\right)^2 dy -$$

$$-2\int_0^\infty \left(U_g - U_2\right) F_x dy + 2\int_0^\infty g\pi\rho_2 \left(U_g - U_2\right) dy - 2\int_0^\infty g\pi\rho_{gm} \left(U_g - U_2\right) dy$$

15. $$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \rho_p U_p^3 dy = -2\int_0^\infty \rho_p \nu_{tp} \left(\frac{\partial U_p}{\partial y}\right)^2 dy + 2\int_0^\infty U_p F_x dy \pm m_p g U_p$$

16. $$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \rho_p^2 U_p dy = -2\int_0^\infty \rho_p \frac{\nu_{tp}}{Sc_t}\left[\frac{\partial \rho_p}{\partial y}\right]^2 dy$$

17. $$\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^\infty c_{pg}\rho_g U_g \left(T_g - T_2\right) dy\right] = \int_0^\infty \left(U_g - U_p\right) dy - \int_0^\infty Q dy$$

18. $$\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^\infty c_{pp}\rho_p U_p T_p dy\right] = \int_0^\infty Q dy$$

където:

G_0 - начално количество на примесите $G_0 = \rho_{g0}\chi_0 U_{p0} y_0 \varphi_0$

I_0 - начално количество на движение $I_0 = \rho_{g_0}\left(1+\chi\right) U_{g_0}^2 y_0 \varphi_1$

χ_0 - начална концентрация $\chi_0 = \frac{G_{p_0}}{G_{g_0}} = \frac{N_p m_p}{N_g m_g} = \frac{N_p \rho_p W_p}{N_g \rho_g W_g}$

Sc_t - число на Шмидт $Sc_t = Sc_g\left(1 + \sqrt{1+\nu_0}\right)$

Sc_g - число на Шмидт за газа $\left(Sc_g = 0.75\right)$

ν_0 - приведена концентрация $\nu_0 = \dfrac{\chi_0}{1+\chi_0}$

С това преобразуване системата частни диференциални уравнения се свежда до обикновенни диференциални уравнения, което се решава по следния начин: Въвежда се подобие на основните параметри на течението (скорост, плътност и пр.) от вида:

19. $$\left(\frac{U_g - U_2}{U_{gm} - U_2}\right) = \frac{U_p}{U_{pm}} = f_1(\eta) = \exp\left(-K_u \eta^2\right)$$

20. $$\left(\frac{U_g - U_p}{U_{gm} - U_{pm}}\right) = \frac{f_1(\eta)\left(U_{gm} - U_{pm}\right)}{U_{gm} - U_{pm}} = f_1(\eta) = \exp\left(-K_u \eta^2\right)$$

21. $$\left(\frac{\chi}{\chi_m}\right) = f_2(\eta) = \exp\left(-K_\chi \eta^2\right)$$

22. $$\left(\frac{\rho_g}{\rho_{gm}}\right) = \left(\frac{T_{gm}}{T_g}\right) = f_3(\eta) = \exp\left(K_T \eta^2\right)$$

23. $$\left(\frac{\rho_p}{\rho_{pm}}\right) = f_4(\eta) = \exp\left(K_T \eta^2 - K_\chi \eta^2\right)$$

24. $$\left(\frac{T_p}{T_{pm}}\right) = \left(\frac{T_g - T_2}{T_{gm} - T_2}\right) = f_4(\eta) = \exp\left(-K_T \eta^2\right)$$

25. $$\left(\frac{T_g - T_p}{T_{gm} - T_{pm}}\right) = f_4(\eta) = \exp\left(-K_T \eta^2\right)$$

С така въведенето подобие интегралните условия се свеждат до следната функционално – диференциална система състояща се от алгебрични и обикновени диференциални уравнения:

26. $$A_{11}\overline{\rho_{pm}}\,\overline{U_{pm}}\,\overline{x}=G_1$$

27. $$A_{21}\overline{\rho_{gm}}\left(\overline{U_{gm}}-\overline{U_2}\right)^2\overline{x}+A_{22}\overline{U_2}\left(\overline{U_{gm}}-\overline{U_2}\right)\overline{x}+$$
$$+A_{23}\overline{\rho_{pm}}\,\overline{U_{pm}^2}\,\overline{x}+\rho_2\pi\overline{g}\,\overline{x}-A_{24}\rho_{gm}\pi\overline{g}\,\overline{x}=I_1$$

28. $$\frac{\partial}{\partial x}\left[A_{31}\overline{\rho_{gm}}\left(\overline{U_{gm}}-\overline{U_2}\right)^3\overline{x}+A_{32}\overline{\rho_{gm}}\,\overline{U_2}\left(\overline{U_{gm}}-\overline{U_2}\right)\overline{x}\right]=$$
$$=-A_{33}\overline{\rho_{gm}}\,\overline{R_u}\left(\overline{U_{gm}}-\overline{U_2}\right)^3\overline{x}^{-1}-2\left(\overline{U_{pm}}-\overline{U_{gm}}\right)F_x+$$
$$+A_{34}\overline{\rho_2}\left(\overline{U_{gm}}-\overline{U_2}\right)\pi\overline{g}\,\overline{x}-A_{35}\overline{\rho_{gm}}\left(\overline{U_{gm}}-\overline{U_2}\right)\pi\overline{g}\,\overline{x}$$

29. $$\frac{\partial}{\partial x}\left[A_{41}\overline{\rho_{pm}}\,\overline{U_{pm}}^3\,\overline{x}\right]=-A_{42}\overline{\rho_{pm}}\,\overline{R_u}\,\overline{U_{pm}}^3\,\overline{x}^{-1}+\left(\overline{U_{pm}}-\overline{U_{gm}}\right)F_x$$

30. $$\frac{\partial}{\partial x}\left[A_{51}\overline{\rho_{pm}^2}\,\overline{U_{pm}}\,\overline{x}\right]=-A_{52}\overline{\rho_{pm}^2}\,\overline{R_u}\,\overline{U_{pm}^3}\,\overline{x}^{-1}$$

31 $$\frac{\partial}{\partial x}\left[A_{61}\overline{\rho_{gm}}\left(\overline{U_{gm}^*}+m\right)\left(\overline{T_{gm}}-T\right)\overline{x}\right]=A_{63}\left(\overline{T_{gm}}-\overline{T_{pm}}\right)\overline{x}+$$
$$+A_{62}\overline{\rho_{pm}}\left(\overline{U_{gm}^*}-\overline{U_{pm}}+m\right)^3\overline{x}$$

32. $$\frac{\partial}{\partial x}\left[A_{71}\overline{\rho_{pm}}\,\overline{U_{pm}}\,\overline{T_{pm}}\,\overline{x}\right]=A_{72}\left(\overline{T_{gm}}-\overline{T_{pm}}\right)\overline{x}$$

33. $$R_u=Sc_t\overline{R_p}$$

34. $$R_u=\Pr_t\overline{R_T}$$

35. $$\overline{P}=\overline{\rho_g}\,\overline{R}\,\overline{T_g}$$

Системата уравнения се решава съвместно като се получава едно уравнение относно $\overline{U_{gm}}$ от вида:

$$\left(L_{17}\overline{\rho_{gm}}^3 + L_{18}\overline{\rho_{gm}}^2\right)\overline{U_{gm}^*}^7 +$$
$$+\left(L_{19}\overline{\rho_{gm}}^3 + L_{20}\overline{\rho_{gm}}^2\right)\overline{U_{gm}^*}^6 +$$
$$+\left(L_{23}\overline{\rho_{gm}}^3 + L_{26}\overline{\rho_{gm}}^2 + L_{27}\overline{\rho_{gm}}\right)\overline{U_{gm}^*}^5 +$$
$$+\left(L_{31}\overline{\rho_{gm}}^3 + L_{36}\overline{\rho_{gm}}^2 + L_{37}\overline{\rho_{gm}}\right)\overline{U_{gm}^*}^4 +$$
$$+\left(L_{41}\overline{\rho_{gm}}^3 + L_{47}\overline{\rho_{gm}}^2 + L_{51}\overline{\rho_{gm}} + L_{52}\right)\overline{U_{gm}^*}^3 +$$
$$+\left(L_{55}\overline{\rho_{gm}}^3 + L_{61}\overline{\rho_{gm}}^2 + L_{67}\overline{\rho_{gm}} + L_{68}\right)\overline{U_{gm}^*}^2$$
$$+\left(L_{69}\overline{\rho_{gm}}^3 + L_{73}\overline{\rho_{gm}}^2 + L_{79}\overline{\rho_{gm}} + L_{83}\right)\overline{U_{gm}^*} +$$
$$+\left(L_{84}\overline{\rho_{gm}}^3 + L_{85}\overline{\rho_{gm}}^2 + L_{88}\overline{\rho_{gm}} + L_{91}\right) = 0$$

36.

Коефициентите в уравнението са описани в [1] и не се прилагат тук за да не се увеличи прекалено много обема на настоящата работа.

Полученото уравнение се решава числено по метода на Нютон – Рапшън, като за всяко сечение се определя $\overline{U_{gm}^*}$. Останалите неизвестни се определят по обратен път на извършеното преобразуване на системата уравнения, както следва:

* от уравнение:

$\overline{U_{pm}} = L_{12} + L_{13}\overline{\rho_{gm}}\overline{U_{gm}^*}^2 + L_{14}\overline{\rho_{gm}}\overline{U_{gm}^*} + L_{15}\overline{\rho_{gm}} + L_{16}$ се определя $\overline{U_{pm}}$

- От уравнение $\overline{R_u} = L_4 + L_3 F_x \left(\frac{\overline{U_{pm}} - \overline{U_{gm}}}{\overline{U_{pm}^2}} \right)$ се определя $\overline{R_u}$

- От уравнение $R_u = Sc_t \overline{R_p}$ $\overline{R_p} = \frac{R_u}{Sc_t}$ се определя $\overline{R_p}$

- От уравнение $R_u = \Pr_t \overline{R_T}$ $\overline{R_T} = \frac{R_u}{\Pr_t}$ се определя $\overline{R_T}$

- От уравнение $\overline{\rho_{pm}} = \frac{L_1}{\overline{U_{pm}} \overline{x}^{j+1}}$ се определя $\overline{\rho_{pm}}$

- От уравнение $\overline{T_{pm}} = e^{\frac{(\overline{x} - \overline{x_0})}{L_{107}}} \left(\overline{T_{p01}} + L_{98} \right)$ се определя $\overline{T_{pm}}$

- От уравнение $\overline{T_{gm}} = L_{95} + L_{96} \overline{T_{pm}}$ се определя $\overline{T_{gm}}$

- От уравнение: $\overline{P} = \overline{\rho_{gm}} R \overline{T_g}$ $\overline{\rho_{gm}} = \frac{\overline{P}}{R \overline{T_g}}$ се определя $\overline{\rho_{gm}}$

Процедурата по пресмятане на параметрите, които са максималните им стойности започва от края на т. нар. начален участък, т.е там където изчезва ядрото на постоянна скорост на $\overline{U_g}$.

Обезразмеряванията са извършени спрямо началните параметри на течението, както следва:

$$\overline{x} = \frac{x}{y_0}; \overline{y} = \frac{y}{y_0}; \overline{U_g} = \frac{U_g}{U_{g0}}; \overline{U_p} = \frac{U_p}{U_{g0}}; \overline{\rho_g} = \frac{\rho_g}{\rho_{g0}}; \overline{\rho_p} = \frac{\rho_p}{\rho_{g0}};$$

$$\overline{T_g} = \frac{T_g.R}{U_{g0}^2}; \overline{T_p} = \frac{T_p.R}{U_{g0}^2}; \overline{g} = \frac{U_{g0}}{t}; \overline{\rho_2} = \frac{\rho_2}{\rho_{g0}};$$

Изводи

Съставен е математически модел на двуфазна неизотермична турбулентна струя, с наличие на подемна сила, изнасяща вредни примеси в атмосферата.

Получена е система от частни диференциални уравнения, описващи движението на изтичаща вертикално, неизотермична двуфазна струя.

Литература

[1] А. Чакър, Моделиране и анализ на възникването и развитието на горски пожари, дисертационен труд, ВСУ „ Черноризец Храбър“ гр. Варна, 2012;

[2] Р.Величкова, А.Чакър, Плоска вертикална неизотермична струя над огнището на пожара, Алманах на ВСУ“Черноризец Храбър“ книжка 6, 2012 стр. 53-65;